УДК 681.518.3

Г.И. Манко, Н.С.Шевчук *(Украинский государственный химико-технологический университет, г. Днепропетровск)*

Информационные характеристики измерительных систем

Рассмотрены вопросы теории и методологии использования информационных оценок измерительных систем. Получен динамический критерий качества измерительной системы, учитывающий её инерционные свойства, статистические параметры измеряемого сигнала, относительный уровень погрешностей и их характер.

Keywords: Informational descriptions; Measuring system; Uncertainty; Informational criterion; Dynamic properties; Dynamic criterion of quality; Equal frequencies intervals; estimation of quality.

Основное назначение *измерительной системы (ИС)* – получение информации об измеряемых величинах. Поэтому для оценки качества ИС могут быть использованы информационные критерии. Такие критерии должны обеспечивать возможность оценивания статических и динамических потерь информации в ходе измерительных операций за счет проведения несложных расчетов.

В известных работах по информационной теории измерений [1-4] используется энтропийный подход, в соответствии с которым неопределенность объекта измерений до эксперимента характеризуется безусловной или априорной энтропией Шеннона [5], а после эксперимента – условной или апостериорной энтропией. Разность их и есть количество информации, полученной при измерении.

Указанные работы имеют чисто теоретическое значение и до настоящего времени информационные характеристики ИС практически не применялись. Это во многом вызвано ограниченностью энтропийного подхода при оценке количества информации, о которой стали говорить практически с момента его создания. На данное замечание К.Шеннон отвечал, что разработал свою теорию информации для решения конкретных задач связи.

Действительно, возможна некоторая аналогия между каналом связи и ИС. Но следует учитывать и специфику измерений.

Дальнейшим развитием классической теории информации стало создание В.В. Петровым, А.В. Запорожцем, А.С. Усковым и др. *информационной теории динамических систем (ИТДС)* [6]. В ИТДС, в целом, сохраняется энтропийный подход и вводится концепция ошибки ε в качестве аксиоматической основы теории. Однако, для решения поставленной нами задачи использование ИТДС малопригодно из-за сложности вычислений, как конкретных информационных характеристик, так и их предельных оценок.

В работе [7] была предпринята первая попытка ввести информационные критерии качества ИС, пригодные для практического применения. Однако использование того же энтропийного подхода обусловило существенные недостатки этих критериев, прежде всего, высокую трудоемкость вычислений, связанных с необходимостью решения систем уравнений с десятками неизвестных. При этом для многоканальных ИС использование этих критериев для оценки качества системы в целом невозможно.

В статье сделана попытка выхода за рамки чисто энтропийного подхода и использования более обобщенных оценок неопределенности. Общий подход к решению этой задачи можно найти в монографии Ю.М. Горского [8], который вводит такие понятия, как неупорядоченность и неорганизованность.

Неупорядоченность $\overline{\text{У}}$ – мера различия какого-либо элемента x_i в отношении эталона порядка $x_{эт}$, которая стремится к нулю при $x_i \to x_{эт}$. Неорганизованность – обобщенная за рассматриваемое число возможных ситуаций и временных интервалов характеристика неупорядоченности, взвешенная по фактору существенности её проявления в отношении определённых показателей функционирования системы:

$$\overline{\text{О}} = \bigcup_{\beta}^{l} \alpha_{\beta} \bigcup_{i}^{d} s_{i} \bigcup_{j}^{m} p_{j} f\left(\overline{\text{У}}\right),$$

где ⌊ – некий условный символ обобщения характеристики неупорядоченности $\overline{\text{У}}$ соответственно за l интервалов времени, d элементов и m ситуаций;

α_β, s_i, p_j – веса соответственно β-го интервала времени, i-го элемента и j-той ситуации;

f – функция, посредством которой производится взвешивание неорганизованности по фактору существенности её проявления в отношении определённого показателя функционирования системы.

В частном случае при l = 1, d = 1 и исходя из предположения аддитивности отдельных ситуативных неорганизованностей

$$\overline{\text{О}} = \sum_{j} p_{j} f(\overline{\text{У}}_{j}) \quad . \qquad (1)$$

Функцию f можно представить одной из четырех зависимостей: линейной, степенной, логарифмической и экспоненциальной.

Многие характеристики ИС могут рассматриваться как частные случаи неорганизованности в виде (1). Например, если обозначить через X действительные значения измеряемой величины, а через Y – результат измерения, то, в соответствии с метрологическими традициями, можно различать следующие простейшие виды неупорядоченности:

1) абсолютную

$$\text{У}_{\text{а}} = X - Ч \quad ;$$

2) относительную

$$\text{У}_{\text{о}} = (X - Ч)/X \quad ;$$

3) приведенную

$$\text{У}_{\text{п}} = (X - Ч)\,/\,Ч_{\text{н}} \quad ,$$

где $X_{\text{н}}$ – некоторое нормированное значение измеряемой величины.

Соответственно, простейшими характеристиками неорганизованности будут выступать:

а) для линейной формы функции f в выражении (1) – математическое ожидание погрешности (например, абсолютной):

$$\overline{\text{О}} = \sum_{j} p(Y_{j} - X_{j}) \;;$$

б) для степенной формы функции f – дисперсия погрешности:

$$\overline{\text{О}} = \sum_{j} p(Y_{j} - X_{j})^{2} \;.$$

Если перейти от абсолютных параметров измеряемых величин к вероятностным, при этом использовать логарифмическую форму функции f, то неорганизованность примет вид энтропии Шеннона:

$$\overline{\text{О}} = H = -\sum_{j} p_{j} \log p_{j} \quad . \qquad (2)$$

Для наблюдателя, исходящего из гипотезы, что некоторая задача характеризуется распределением вероятностей ответа $\{q_j\}$, в то время как реальным является распределение $\{p_j\}$, М.М. Бонгард предложил свою меру неопределенности [9], которая также является частным случаем неорганизованности по Горскому:

$$\overline{\text{О}} = N(p/q) = -\sum_{j} p_{j} \log q_{j} \quad . \qquad (3)$$

Тогда, согласно Бонгарду, эксперимент несет наблюдателю полезную информацию в количестве

$$I_{\text{П}} = H - N(p/q) = \sum_{j} p_{j} \log(q_{j}/p_{j}) \quad . \qquad (4)$$

Бонгард ввел понятие полезной информации при рассмотрении вопросов распознавания образов, однако уделил ему недостаточно внимания несмотря на то, что данное понятие может быть эффективно использовано в теории измерений.

Если измеряемая величина X имеет распределение вероятностей $P=\{p(X_j)\}$, а результаты измерений Y имеют распределение $Q=\{q(X_j)\}$, то можно говорить, что ИС вносит следующее количество дезинформации:

$$D=\sum_j p(X_j)\log(p(X_j)/q(Y_j)) \qquad (5)$$

Следует отметить, что выражение (5) – также частный случай (1), если неупорядоченность оценивать отношением вероятностей значений измеряемой величины и результата измерений. Выражение (5) может служить обобщенным информационным критерием качества ИС, в котором, в том числе, учитываются статистические характеристики измеряемой величины X и то, насколько данная система подходит для ее измерения. Идеальная ИС обеспечивает нулевое значение дезинформации D.

Критерий (5) позволяет произвести абсолютную оценку качества ИС. Интерес также представляет получение относительной оценки. Необходимо учитывать, что в случае заведомо неисправной ИС неопределенность знаний об измеряемой величине максимальна, и оценивать качество ИС следует относительно этого крайнего случая. При этом все значения Y_j результатов измерения будут равновероятны:

$$q(Y_j)=1/m \quad ,$$

где m – общее число возможных значений величины Y. Неопределенность значений измеряемой величины определяется в соответствии с (4):

$$N_0=-\sum_j p(X_j)\log(1/m)=\log m \quad .$$

В случае использования ИС неопределенность значений измеряемой величины равна

$$N(p/q)=-\sum_j p(X_j)\log q(Y_j) \quad .$$

Можно сказать, что использование этой ИС даёт количество полезной информации:

$$I=N_0-N(p/q)=-\sum_j p(X_j)\log\,[mq(Y_j)] \qquad (6)$$

Выражение (6) также является информационным критерием качества ИС.

В силу аддитивных свойств информации критериями (5) и (6) легко осуществляется оценка качества многоканальных ИС. Общий критерий качества таких систем равняется сумме информационных критериев для каждого из каналов.

Рассмотренные критерии относятся к статическим, поскольку не учитывают динамических свойств ИС. Для исследования динамики ИС рассмотрим процессы изменения нерганизованности во времени.

Во время измерения значение неорганизованности измеряемой величины падает до некоторого значения $\overline{\mathrm{O}}_{\text{ост}}$, определяемого погрешностями измерения (участок *1* на рис. 1). Затем неорганизованность начинает расти (участок *2*), достигая со временем максимального значения, которое можно оценить выражением (2).

Динамика возрастания неорганизованности на участке 2 представляется скоростью создания неорганизованности

$$\upsilon_{\text{соз}}=d\,\overline{\mathrm{O}}/dt,$$

а динамика уменьшения неорганизованности – скоростью процесса измерения

$$\upsilon_{\text{изм}}=-d\,\overline{\mathrm{O}}/dt.$$

Как и большинство процессов с самовыравниванием, процесс возрастания неорганизованности можно аппроксимировать экспоненциальной зависимостью

$$\overline{\mathrm{O}}=\overline{\mathrm{O}}_{\text{ост}}-(H-\overline{\mathrm{O}}_{\text{ост}})Ce^{-\alpha t},$$

где C и α – постоянные величины.

Форма кривой изменения неорганизованности на участке *1* определяется динамическими характеристиками ИС, которая может быть представлена апериодическим звеном первого-второго порядка или колебательным звеном.

Для упрощения дальнейших выкладок аппроксимируем участок *2* кривой роста неорганизованности линейной функцией

$$\overline{\text{O}} = \overline{\text{O}}_{\text{ост}} + \upsilon_{\text{ср}} t,$$

где $\upsilon_{\text{ср}}$ – средняя скорость возрастания неорганизованности. Отсюда:

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{\overline{\text{O}} - \overline{\text{O}}_{\text{ост}}}{t_2 - t_1}.$$

Статистические связи между значениями измеряемой величины в моменты времени t_1 и t_2 уменьшаются до уровня, которым можно пренебречь. Поэтому интервал $\tau_0 = t_1 - t_2$ можно рассматривать как оптимальный интервал между двумя последовательными измерениями. Он определяется как минимальный интервал τ, при котором коэффициент корреляции $R(\tau)$ становится равным нулю [10]. Тогда:

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{H(p) - \overline{\text{O}}_{\text{ост}}}{\tau_0}. \qquad (7)$$

Пусть время, необходимое для получения результата измерения Y_j, равно T_j. К моменту получения результата измеряемая величина уже будет иметь некоторую неорганизованность $\overline{\text{O}}_T = \upsilon_{\text{ср}} T_j$, характеризующую динамическую погрешность ИС.

Считая, что такие источники неорганизованности, как статические погрешности измерения и запаздывание T_j, взаимно независимы, общую неорганизованность величины измеряемой величины X в момент получения результата Y_j определим таким образом:

$$\overline{\text{O}}(X/Y_j) = \overline{\text{O}}_{\text{ост}} + \overline{\text{O}}_T \quad .$$

Наибольшее количество информации, которое может содержаться в результате измерения Y_j:

$$I(X/Y_j) = H(p) - \overline{\text{O}}(X/Y_j)$$

или

$$I(X/Y_j) = H(p) - \overline{\text{O}}_{\text{ост}} - \upsilon_{\text{ср}} T_j. \qquad (8)$$

Максимальная скорость прохождения информации через ИС

$$\upsilon_j = \frac{I(X/Y_j)}{T_j}.$$

Поскольку вероятность получения результата Y_j равняется p_j, средняя для всех измерений максимальная скорость прохождения информации через ИС может быть определена как математическое ожидание величины υ_j:

$$\upsilon = \sum_j p_j \frac{I(X/Y_j)}{T_j}. \qquad (9)$$

Для того, чтобы потери информации были малы, необходимо, чтобы средняя скорость создания неорганизованности не превышала максимальную скорость передачи информации:

$$\upsilon_{\text{ср}} \le \sum_j p_j \frac{I(X/Y_j)}{T_j}.$$

Подставив сюда выражения для $\upsilon_{\text{ср}}$ (7) и $I(X / Y_j)$ (8), после преобразований получим:

$$\frac{2}{\tau_0} \le \sum_j p_j \frac{1}{T_j} = \frac{1}{T_{\text{ср}}} \ ,$$

где $T_{\text{ср}}$ – среднее время измерения.

Таким образом, $T_{\text{ср}} \le \frac{\tau_0}{2}$, т.е. условием минимальных потерь информации вследствие динамических погрешностей является применение такой ИС, у которой среднее время измерения меньше половины интервала τ_0. Максимальную скорость передачи информации можно рассматривать как реальную пропускную способность ИС.

Подставив в (9) выражение для количества информации (6), получим с учетом того, что $\sum_{j=1}^{m} p_j \frac{1}{T_j}$ – математическое ожидание $\frac{1}{T_{\text{ср}}}$:

$$\upsilon = \frac{1}{T_{\text{ср}}} \sum_{j=1}^{m} p_j \log(mq_j) \ . \qquad (10)$$

Это динамический критерий качества ИС, в котором учитываются её инерционные свойства, статистические параметры измеряемого сигнала, относительные уровени погрешностей и их характер.

Практическое использование предложенных информационных характеристик сталкивается с двумя затруднениями.

1. Поскольку истинное значение измеряемой величины неизвестно, то распределение вероятностей $P=\{p(X_j)\}$ достоверно знать невозможно.

Данное препятствие может быть обойдено классическим методом, используемым в метрологии. Вместо истинных значений измеряемой величины используются действительные, т.е. условно-истинные, найденные экспериментально с наибольшей точностью. Таким образом, распределение вероятностей P может быть получено экспериментальным путём с использованием образцовых измерительных приборов.

Возможен и упрощенный подход к решению этой проблемы, состоящий в принятии гипотезы о стандартном законе распределения вероятностей значений измеряемой величины. В качестве стандартного может быть принят нормальный, как наиболее распространённый, или же равномерный, который дает наибольшую априорную неопределенность о значении измеряемой величины.

2. Если значения вероятностей $p(X_j)$ или $q(Y_j)$ равняются нулю, например, при малой выборки экспериментальных данных, или в случае систематической погрешности, приводящей к несовпадению диапазонов изменения величин X и Y, то применение логарифмической функции f невозможно.

Для того, чтобы избежать нулевых значений вероятностей, нами была разработана методика экспериментального нахождения распределений P и Q, основанная на методе равночастотных интервалов [11].

Применительно к задаче определения информационных характеристик метод [10] был модифицирован следующим образом.

Сначала находятся верхняя $L_B=\sup(X \cup Y)$ и нижняя $L_H=\inf(X \cup Y)$ границы объединения множеств $X = \{x_j\}$ и $Y = \{y_j\}$ наблюдений действительных значений и результатов измерения измеряемой величины. Затем определяется число интервалов разбиения диапазона $[L_H; L_B]$ по известным формулам статистики, например,

$$m = 1{,}5 + 3{,}322 \ln N \ ,$$

где N – объем выборки, и находятся границы $\{L_j\}$ интервалов разбиения, причем $L_1=L_H$, $L_{m+1}=L_B$. Все интервалы $[L_j; L_{j+1}]$ принимаются равными друг другу.

Далее для каждого элемента из множеств X и Y отдельно находятся границы равночастотных интервалов по методу [11]. Для этого наблюдения из каждой выборки располагаются в возрастающем порядке и разбиваются на m равных групп. При этом число наблюдений в группе не должно быть меньше пяти, в противном случае необходимо уменьшить число групп. Затем рассчитываются границы равночастотных интервалов как полсуммы наибольшего значения X_i для предыдущей группы и наименьшего X_{i+1} для последующей группы:

$$L_{xk} = (x_i + x_{i+1})/2 \quad .$$

На рис. 2 показан примерный вид взаимного расположения границ $\{L_j\}$ исходных, а также границ $\{L_{xk}\}$ и $\{L_{yl}\}$ равночастотных интервалов для выборок соответственно действительных и измеренных значений измеряемой величины. Представлены границы интервалов разбиения множеств X (линия *1*), $X \cup Y$ (линия *2*) и Y (линия *3*).

Для каждого из равночастотных интервалов определяется плотность частот попадания значения X и Y в j-тый интервал

$$d_{xk} = n_k / N(L_{xk+1} - L_{xk});$$
$$d_{ul} = n_l / N(L_{yl+1} - L_{yl}),$$

где n_k (n_l) – число наблюдений в k-том (l-том) интервале для выборок действительных (измеренных) значений измеряемой величины.

По известным плотностям частот d_{xk} и d_{yl} для каждого из исходных интервалов $[L_j; L_{j+1}]$ определяются частоты попадания в интервал ν_{xj} и ν_{yj}.

Например, для показанного на рис. 2 случая интервалу $[L_j; L_{j+1}]$ соответствуют частоты

$$\nu_{xi} = d_{xk-1}(L_{xk} - L_j) + d_{xk}(L_{j+1} - L_{xk}),$$
$$\nu_{yj} = d_{yk-1}(L_{yk} - L_j) + d_{yk}(L_{yj+1} - L_{yk}) + d_{yl+1}(L_{j+1} - L_{yl+1}) \quad .$$

Рассчитанные таким образом частоты ν_{xj} и ν_{yj} являются оценками вероятностей $p(x_j)$ и $q(y_j)$.

В заключении стоит сказать, что рассмотренные критерии обеспечивают практическую возможность оценки качества ИС с учетом потерь информации в ходе измерений в целях их последующей минимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рабинович В.И., Цапенко М.Н.** Информационные характеристики средств измерения и контроля. М.: Энергия, 1968. 96 с.
2. **Новицкий П.В.** Основы информационной теории измерительных устройств. М.: Энергия, 1968. 248 с.
3. **Мандельштам С.М., Кавалеров Г. И.** Введение в информационную теорию измерений. М.: Энергия, 1974. 376с
4. **Орнатский П.П.** Теоретические основы информационно-измерительной техники. К.: Вища школа, 1983. 324 с.
5. **Шеннон К.** Работы по теории информации и кибернетика. М.: Иностранная литература, 1963. 829 с.
6. **Петров В.В., Запорожец А.В.** Информационная теория динамических систем // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2000. № 8. С. 6–11.
7. **Манко Г.И., Мальцев Н.Н.** Информационные характеристики технологических измерительных приборов// Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 1978. № 8. С. 8–13.
8. **Горский Ю.М.** Информационные аспекты управления и моделирования. М.: Наука, 1978. 223 с.
9. **Бонгард М.М.** Проблемы узнавания. – М.: Наука, 1967 – 320 с.
10. **Железнов Н.А.** Некоторые вопросы теории информационных электрических систем. Л.: ЛКВВИА им. А.Ф.Можайского, 1960. 320 с.
11. **Гаскаров Д.В., Шаповалов В.И**. Малая выборка. М.: Статистика, 1978. 248 с.

Статья поступила в редакцию 19.07.2007 г.